# Chapitre III : Les ondes électromagnétiques dans la matière

## I. Equations de Maxwell dans la matière :

### I. 1. Cas d'un milieu quelconque :

Dans la matière, les équations de base de l'électromagnétisme en régime variable sont

$$div\vec{E}(M,t) = \frac{\rho_t}{\varepsilon_0} = \frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow div\vec{D}(M,t) = \rho(M,t) \ ;$$

$$div\vec{B}(M,t) = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t) = \mu_0 \left( \vec{j} + \vec{j}_a + \vec{j}_P + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \right)$$

$\rho(M,t)$ et $\vec{j}$ sont respectivement la densité volumique de charges libres et le vecteur densité volumique de courant réel.

$\rho_p(M,t)$ : densité volumique de charges de polarisation et $\vec{j}_p(M,t)$ le vecteur densité de courant dû aux charges de polarisation.

D'après l'équation de conservation de la charge électrique, le vecteur densité de courant des charges de polarisation est tel que :

$$div\vec{j}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0$$

Or :

$$\rho_p = -div\vec{P}$$

Donc :

$$div\vec{j}_p + \frac{\partial}{\partial t}(-div\vec{P}) = div\vec{j}_p - div(\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}) = div(\vec{j}_p - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) = 0$$

Cette équation est bien vérifiée si on choisit $\vec{j}_P$ de sorte que :

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

D'autre part :

$$\vec{j}_a = \overrightarrow{rot}\vec{M}$$

Donc :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t) = \mu_o \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \overrightarrow{rot}\vec{M} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_o \vec{E}) \right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{rot}(\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}) = \left( \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}) \right) \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

## I. 2. Cas d'un milieu LHI :

Dans un milieu linéaire homogène et isotrope :

$$\vec{D} = \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

Les équations de Maxwell dans un milieu LHI, s'écrivent donc :

$div\vec{B}(M,t) = 0$,

$div\vec{E}(M,t) = \dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon}$,

$\overrightarrow{rot}\vec{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$

$\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t) = \mu(\vec{j}(M,t) + \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t})$

Ces équations ont la même forme que celles dans le vide avec $\mu_0$ et $\varepsilon_0$ remplacés par $\mu$ et $\varepsilon$.

## II- Propagation d'onde plane monochromatique dans un milieu diélectrique LHI :

### 1. Equation de propagation :

Dans un milieu diélectrique (**isolant parfait**), la densité des charges libres et le vecteur densité de courants réels sont nulles :

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j} = 0$$

Les équations de Maxwell s'écrivent donc :

$div\vec{B} = 0$,

$div\vec{E} = 0$,

$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Ces équations sont analogues à celles obtenues dans le vide en absence de charges et de courants avec $\mu_0$ et $\varepsilon_0$ remplacés par $\mu$ et $\varepsilon$.

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifient l'équation des ondes :

$$\Delta\vec{F} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} \quad \text{avec : } v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

En effet, pour le champ électrique :

$\overrightarrow{rot}\vec{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$, et $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

On a :

$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\vec{E}(M,t) = \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \overrightarrow{rot}(-\dfrac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t)) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\mu\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E})$ avec

$div\vec{E} = 0$, on a donc : $-\Delta\vec{E} = -(\mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2})$

Ce qui donne : $\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ où $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

De même pour le champ magnétique : $\Delta\vec{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$

**2- Structure d'une OPPM (onde plane progressive monochromatique):**

On cherche, au sein du diélectrique, la propagation d'une onde électromagnétique dont le champ soit de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_o e^{j\omega(\frac{\vec{k}}{\omega}\cdot\vec{r} - t)}$$

où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde, dans le milieu considéré, défini par :

$$\vec{k} = k\vec{u} = \frac{\omega}{v}\vec{u}$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire de la direction de propagation et v est la vitesse de l'onde, dans le milieu, qui est appelée vitesse de phase.

Comme dans le cas des ondes planes dans le vide, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses et liés par la relation :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

En effet :

$div\vec{E} = 0 \Rightarrow j\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$, l'onde est transverse

$div\vec{B} = 0 \Rightarrow j\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}$, L'onde est transverse

$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = j\vec{k} \wedge \vec{E} = -(-j\omega\vec{B}) \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$ ($\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ forment un trièdre direct)

**3- Relation de dispersion :**

A l'exception du vide, tous les milieux matériels dans lesquels peuvent se propager des ondes sont dispersifs : la permittivité ε du milieu est fonction de la pulsation ω (fréquence) de l'onde.

La relation entre k et ω, appelée relation de dispersion, est donnée par :

$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \varepsilon(\omega)\mu\omega^2$,

Il y a dispersion dans le milieu car des ondes de fréquences différentes ne se propagent pas à la même vitesse. $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega)\mu_r = k_o^2 \cdot \varepsilon_r(\omega) \cdot \mu_r$

où $k_o = \frac{\omega}{c}$ est le vecteur d'onde dans le vide

En effet, nous avons :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = j\vec{k} \wedge \vec{B} = -j\omega\mu\varepsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{B} = \vec{k} \wedge (\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}) = -\omega\mu\varepsilon\vec{E}$$

$$(\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E})\wedge\vec{k}=\vec{E}\cdot(\frac{\vec{k}}{\omega}\cdot\vec{k})-\frac{\vec{k}}{\omega}\cdot(\vec{E}\cdot\vec{k})=\vec{E}\cdot\frac{k^2}{\omega}=\omega\mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r\vec{E}\Rightarrow k^2=\frac{1}{c^2}\omega^2\mu_r\varepsilon_r$$

Rappel : $\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)\wedge\vec{C}=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\vec{A}\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$

**Remarques :**

- Pour les milieux diélectriques $\mu_r$ est voisin de l'unité et par suite la relation de dispersion s'écrit :

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega)$$

- la permittivité relative $\varepsilon_r(\omega)$ et le vecteur d'onde k peuvent être complexe (c'est le cas des milieux absorbants).

  En effet $\varepsilon_r$ dépend de $\omega$ et son expression est donnée par (dans le modèle de l'électron élastiquement lié) : $\varepsilon_r(\omega)=1+\frac{ne^2}{m\varepsilon_0\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-j\omega\beta\right]}$

  $\varepsilon_r(\omega)=\varepsilon'_r(\omega)+j\varepsilon''_r(\omega)$ est complexe ($\varepsilon'_r(\omega)$ et $\varepsilon''_r(\omega)$ sont positives).

- Dans les milieux absorbants : $k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega)=\frac{\omega^2}{c^2}\left[\varepsilon'_r(\omega)+j\varepsilon''_r(\omega)\right]$

Le vecteur d'onde k est complexe : $k=k'+jk''$

Le vecteur d'onde k est donc complexe avec une partie imaginaire k'' positive (responsable du phénomène de l'absorption de l'onde) et une partie réelle également positive (qui rend compte de la propagation de l'onde).

**4. Milieux diélectriques absorbants :**

Considérons une onde plane progressive monochromatique (OPPM) qui se propage, dans la direction de l'axe OX, dans un milieu diélectrique absorbant.
L'absorption de l'onde se traduit mathématiquement par une décroissance exponentielle de l'amplitude de l'onde en fonction de x :

$$\vec{E}=\vec{E}_0e^{j(kx-\omega t)}=\vec{E}_0e^{j\left[(k'+jk'')x-\omega t\right]}=\vec{E}_0e^{-k''x}e^{j(k'x-\omega t)}$$

La vitesse de phase (vitesse de déplacement de l'onde dans le milieu) est donnée par : $v_\varphi=\frac{\omega}{k'}$

D'après la relation de dispersion :

$$k^2=(k'+jk'')^2=k'^2-k''^2+2jk'k''=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r\Rightarrow\varepsilon_r=\frac{c^2}{\omega^2}(k'^2-k''^2)+j\frac{2c^2k'k''}{\omega^2}=\varepsilon'_r+j\varepsilon''_r$$

La permittivité du milieu diélectrique (appelée constante diélectrique du milieu) est donc également complexe :

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)=\varepsilon_0\left(\varepsilon'_r(\omega)+j\varepsilon''_r(\omega)\right)=\varepsilon'(\omega)+j\varepsilon''(\omega)$$

L'indice complexe du milieu est défini par :

$$n(\omega)=\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}=n'(\omega)+jn''(\omega)$$

On obtient alors les relations : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r \Rightarrow k = \frac{c}{\omega}\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{c}{\omega}n = n' + jn''$

$$k' = \frac{\omega}{c}n' \;;\quad k'' = \frac{\omega}{c}n'' \;;\quad \varepsilon'_r = n'^2 - n''^2 \text{ et } \varepsilon''_r = 2n'n''$$

La partie réelle n' de l'indice complexe est appelée <u>indice de réfraction</u> du milieu et s'exprime par :

$$n' = \frac{k'}{\omega}c = \frac{c}{v_\varphi}$$

La longueur d'onde dans le diélectrique est $\lambda = v_\varphi T = \frac{cT}{n'} = \frac{\lambda_0}{n'}$

La partie imaginaire n" de l'indice complexe est appelée <u>indice d'extinction</u> de l'onde dans le milieu considéré et s'exprime par :

$$n'' = \frac{k''}{\omega}c = \frac{k''}{k_0}$$

où $k_0$ est le vecteur d'onde de l'onde plane considérée dans le vide.

**Aspect Energétique :**

Pour étudier l'aspect énergétique de l'onde progressive qui se déplace dans le milieu diélectrique absorbant on doit exprimer le vecteur de Poynting $\vec{R}$.

En représentation réelle, ce vecteur est donné par :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = c^2\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (\mu \approx \mu_0)$$

Or, en représentation complexe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k''x} e^{j(k'x - \omega t)} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{k}{\omega}\vec{e}_x \wedge \vec{E} = \frac{n}{c}\vec{e}_x \wedge \vec{E} = \frac{n' + jn''}{c}(\vec{e}_x \wedge \vec{E}_o)e^{-k''x}e^{j(k'x - \omega t)}$$

Donc, en représentation réelle :

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{-k''x}\cos(k'x - \omega t) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{1}{c}(\vec{e}_x \wedge \vec{E}_o)e^{-k''x}\left[n'\cos(k'x - \omega t) - n''\sin(k'x - \omega t)\right]$$

D'où :

$$\vec{R} = \left[n'\cos^2(k'x - \omega t) - n''\sin(k'x - \omega t)\cos(k'x - \omega t)\right]c\varepsilon_o E_o^2 e^{-2k''x}\vec{e}_x$$

La valeur moyenne de $\vec{R}$ est donc : $\vec{R}_{moy} = \frac{1}{2}cn'\varepsilon_o E_o^2 e^{-2k''x}\vec{e}_x$

Cette expression représente le flux énergétique par unité de surface.

L'énergie de l'onde décroît en $e^{-2k''x}$.

Le flux $\phi$ d'une OPPM est proportionnel à la valeur moyenne de vecteur de Poynting alors on peut écrire que le flux de l'onde dans le milieu diélectrique peut s'exprimer par :

$$\phi(x) = \phi_0 e^{-2k''x} = \phi_0 e^{-\alpha x} \text{ (dans la région des x positifs)}$$

Où <u>$\phi_0$ est le flux énergétique d'une onde incidente à l'entrée du milieu</u>.

Le coefficient $\alpha$, appelé <u>coefficient d'absorption</u>, s'exprime par :

$$\alpha = 2k'' = 2n'' k_0 = \frac{4\pi\, n''}{\lambda_0} \text{ avec } k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

où $\lambda_0$ est la longueur d'onde de l'onde considérée dans le vide.

## 5. Milieux diélectriques non absorbants (transparent):

Dans un milieu diélectrique non absorbant (**donc transparent**) pour la fréquence angulaire $\omega$, ( k'' =0, n''=0, $\varepsilon''_r = 0$**)** : k, n et $\varepsilon$ sont réels.

La relation de dispersion s'écrit :

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r(\omega)} = \omega\frac{n}{c}$$

La vitesse de phase de l'onde électromagnétique est alors :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}.$$

Pour les milieux transparents dans le domaine optique ou infrarouge, $\varepsilon_r$ est supérieur à l'unité et la vitesse de phase dans ces milieux est donc toujours inférieure à c.

L'indice de réfraction n en optique est donc toujours supérieur à 1.

La longueur d'onde dans un tel milieu correspond à la période spatiale :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}\frac{c}{n} = \frac{\lambda_o}{n} = \frac{cT}{n} = vT$$

où $\lambda_o$ est la longueur d'onde de l'onde électromagnétique, de même fréquence, qui se propage dans le vide.

Dans un milieu transparent, le flux énergétique par unité de surface est :

$$\left\langle \vec{R}_{moy} \right\rangle = \frac{1}{2} cn\varepsilon_o E_o^2 \vec{u}$$

On remarque que ce flux reste constant; ce qui traduit bien le fait que le milieu soit non absorbant.

## III. Coefficients de réflexion et de transmission en incidence normale :

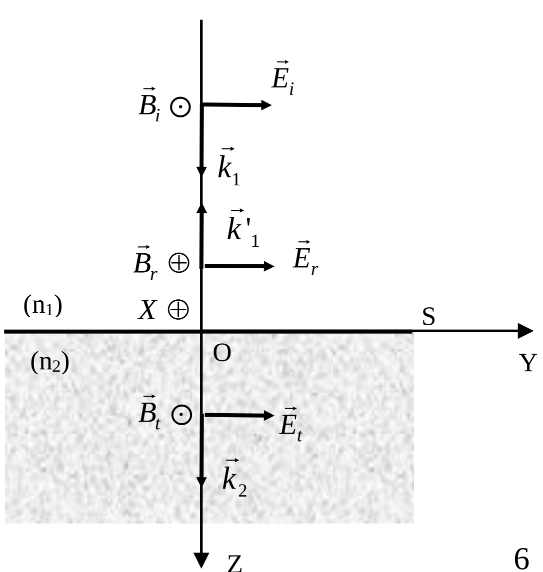
Soit une onde électromagnétique plane sinusoïdale qui atteint, sous une incidence normale ($i_1$ = 0), la surface S séparant deux milieux transparents (1) et (2) d'indices respectifs $n_1$ et $n_2$.

Les champs électrique $\vec{E}_i$ et magnétique $\vec{B}_i$ de cette onde sont parallèles à la surface de séparation. De même pour les champs ($\vec{E}_r$, $\vec{B}_r$) et ($\vec{E}_t$, $\vec{B}_t$) des ondes réfléchies et transmises.

L'onde incidente : $\vec{E}_i(z,t) = E_{0i} e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_y$

L'onde réfléchie : $\vec{E}_r(z,t) = E_{0r} e^{j(\omega t + k_1' z)} \vec{e}_y$

L'onde transmise : $\vec{E}_t(z,t) = E_{0t} e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_y$



Pour obtenir le champ magnétique $\vec{B}$ on a : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{n_1}{c}\vec{e}_z \wedge \vec{E}_i = -\frac{n_1 E_{0i} e^{j(\omega t - k_1 z)}}{c}\vec{e}_x$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{n_1}{c}\vec{e}_z \wedge \vec{E}_r = \frac{n_1 E_{0r} e^{j(\omega t + k_1' z)}}{c}\vec{e}_x$$

$$\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{n_2}{c}\vec{e}_z \wedge \vec{E}_t = -\frac{n_2 E_{0t} e^{j(\omega t - k_2 z)}}{c}\vec{e}_x$$

Donc, les relations de passage pour les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$, en O, s'écrivent :

Continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ et de $\vec{H}$ ($\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$)

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} & (1) \\ \frac{n_1}{\mu_0 c} E_{0i} - \frac{n_1}{\mu_0 c} E_{0r} = \frac{n_2}{\mu_0 c} E_{0t} & (2) \end{cases}$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les expressions des coefficients de réflexion ρ et de transmission t en incidence normale :

$$\rho = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Les coefficients ρ et t, définis par les rapports des amplitudes des ondes réfléchies et transmises à celle de l'onde incidente sont appelés coefficients de Fresnel.

**Remarques :**

- L'expression de ρ montre que la réflexion sur un milieu plus réfringent que le milieu d'incidence ($n_1 < n_2$) s'accompagne d'un changement de signe de l'amplitude de l'onde incidente ; ce qui se traduit par l'introduction d'un déphasage de π. En effet :

$$-E_{0r} = E_{0r} e^{j\pi}$$

- Les expressions de r et t sont encore valables pour des milieux absorbants; les indices $n_1$ et $n_2$ étant alors complexes.

- Dans les milieux non absorbant on constate que :

  - t est positif quelque soient $n_1$ et $n_2$ : la transmission se fait sans changent de phase.

  - r est positif ou négatif suivant les valeurs de $n_1$ et $n_2$ :

    si $n_1 > n_2$, la réflexion n'introduit pas de changement de phase.

    si $n_1 < n_2$, la réflexion introduit un changement de phase de π.

- Si on s'intéresse aux puissances au lieu des amplitudes, on définit les facteurs de réflexion et de transmission (énergétiques) R et T par :

$$R=\frac{P_{réfléchie}}{P_{incidente}}=\frac{scn_1\varepsilon_0(E_{0r})^2}{scn_1\varepsilon_0(E_{0i})^2}=\left(\frac{E_{or}}{E_o}\right)^2=\rho^2 \Rightarrow R=\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2$$

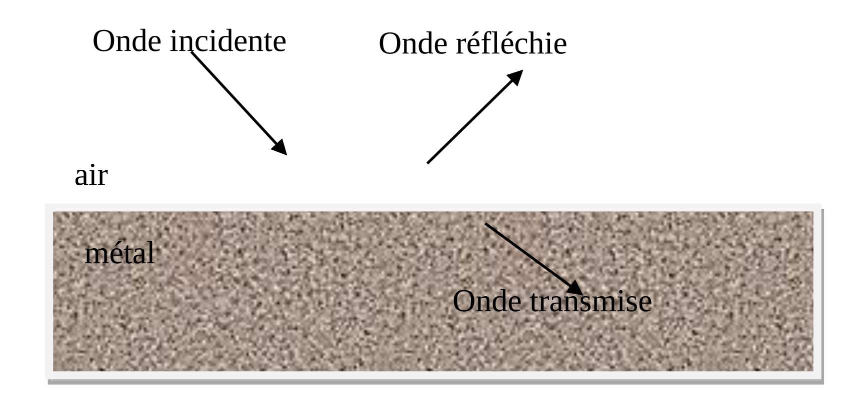
$$T=\frac{P_{transmise}}{P_{incidente}}=\frac{scn_2\varepsilon_0(E_{0t})^2}{scn_1\varepsilon_0(E_{0i})^2}=\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_{ot}}{E_o}\right)^2=\frac{n_2}{n_1}t^2 \Rightarrow T=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}$$

où la puissance P est donnée par le flux du vecteur de Poynting à travers la surface s.
On vérifie bien la relation qui traduit la conservation d'énergie pour des milieux transparents:

$$R+T=1$$

## IV. Propagation des ondes électromagnétiques planes dans les milieux conducteurs :

On s'intéresse à l'arrivée d'une onde électromagnétique sur une surface métallique.
Dans le conducteur, les charges de conduction sont mises en mouvement par le champ de l'onde électromagnétique et vont intervenir dans le processus de propagation.




### Propagation d'une onde plane dans un conducteur :

Dans un conducteur de conductivité électrique $\gamma$, la densité de charges totale $\rho$ est nulle (**conducteur neutre**) et le vecteur densité de courant réels $\vec{j}$ est lié au champ électrique par la relation :

$$\vec{j}=\gamma\,\vec{E}$$

( $\vec{j}$ est proportionnel au champ $\vec{E}$ ).
Dans le domaine de faible fréquences ($f<10^{14}$ Hz); la loi d'Ohm est valable et que la conductivité $\gamma$ est réelle et constante. De même que $\mu$ et $\varepsilon$ sont réels.

**Rappel** : dans les matériaux conducteurs on distingue deux catégories de charge : charges fixes et mobiles. Le courant est assuré par les charges de conduction (ou libres) qui peuvent se déplacer librement dans l'ensemble du matériau et contribuer au courant macroscopique (les charges fixes ou liées, dont l'amplitude des déplacements reste microscopique, ne participent pas au courant macroscopique).

Dans l'équation de Maxwell-Gauss on fait intervenir la charge volumique totale alors que les lois qui régissent le mouvement macroscopique des charges ne fait intervenir que les charges mobiles.

Dans un conducteur neutre $\rho = \rho_{fixe} + \rho_{mobiles} = 0$

Finalement, le champ électromagnétique (EM) vérifie les équations de Maxwell suivantes :

$div\vec{B} = 0$ , $div\vec{E} = 0$ , $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu(\gamma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

L'équation d'onde pour le champ électrique s'écrit donc :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \frac{\overrightarrow{grad}\rho}{\varepsilon} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

où v est la vitesse de phase de l'onde donnée par :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \text{ (ε réel et μ réel)}$$

Une onde plane progressive qui se propage suivant l'axe OX ($\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$) est solution de cette équation si :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} + i\mu\gamma\omega \quad \text{ou encore : } \quad k = \frac{\omega}{v}\sqrt{\left(1 + i\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)}$$

k est donc complexe et on peut l'écrire sous la forme :

$$k = k_1 + ik_2$$

Le champ électrique de l'onde considérée s'écrit donc :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k_2 x} e^{i(k_1 x - \omega t)}$$

L'amplitude de l'onde décroît exponentiellement en se propageant dans un tel milieu.

La vitesse de phase de l'onde est dans ce cas donnée par :

$$v = \frac{\omega}{k_1}$$

Dans un ***bon conducteur*** et pour ***des faibles fréquences***,

$$\frac{\gamma}{\varepsilon\omega} >> 1$$

(γ est grande ; seul le terme $\vec{j}$ est conservé ; le courant de déplacement étant négligé : on est dans l'approximation du régime Quasi-stationnaire(ARQS) :

$div\vec{B} = 0$ , $div\vec{E} = 0$ , $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ; $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu(\gamma\vec{E})$ ).

$\left|\vec{j}_D\right| = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \varepsilon\omega\left|\vec{E}\right|$ et $\left|\vec{j}\right| = \gamma\left|\vec{E}\right|$

$$\frac{\left|\vec{j}_D\right|}{\left|\vec{j}\right|} = \frac{\varepsilon\omega}{\gamma} << 1$$

Application numérique : pour le cuivre par exemple : $\gamma = 6 \cdot 10^{7} (S.m)^{-1}$ et pour les faibles fréquences (exemple : $f = 1\,GHz$) et $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.84 \cdot 10^{-12} (S.I)$

$$\frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}|} = \frac{\varepsilon\omega}{\gamma} = 9.25 \cdot 10^{-10} << 1$$

$$k = \frac{\omega}{v}\sqrt{\left(j\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}\left(j\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right) \Rightarrow k^2 = j\frac{\gamma\omega}{\varepsilon v^2} \quad k \quad est\ complexe$$

Soit $k = k_1 + jk_2 \Rightarrow k^2 = k_1^2 - k_2^2 + 2jk_1k_2 = j\frac{\gamma\omega}{\varepsilon v^2}$

Alors on déduit : $k_1^2 - k_2^2 = 0 \quad et \quad 2k_1k_2 = \frac{\gamma\omega}{\varepsilon v^2}$

D'où :

$$k_1 = k_2 = \left(\frac{\gamma\omega}{2\varepsilon v^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\delta}$$

Comme $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ alors : $k_1 = k_2 = \left(\frac{\mu\gamma\omega}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\delta}$

où δ est la distance au bout de laquelle l'amplitude de l'onde est réduite d'un facteur e. Cette distance est appelée <u>profondeur de pénétration</u>.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(k_1x - \omega t)}$$

$$si \quad x = \delta \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{e} e^{j(k_1x - \omega t)}$$

Cette distance est appelée épaisseur de peau et correspond à la <u>profondeur de pénétration</u> de l'onde dans le métal.
Cette épaisseur est d'autant plus faible que : la conductivité de matériau et la fréquence de l'onde sont élevées.

En général, les champs s'amortissent sur une profondeur de pénétration δ très faible. On dit alors qu'il y'a un <u>effet de peau</u> : le champ et le courant associé sont localisés au niveau de la surface du conducteur.

Si l'on considère une onde EM de fréquence de l'ordre du **Ghz**, δ est de l'ordre du micromètre.

$f = 1GHz \Rightarrow \delta = 6.5\mu m$.

$f = 1MHz \Rightarrow \delta = 0.21\,mm$

$\delta$ est faible, l'onde électromagnétique reste localisée sur une épaisseur très faible de la surface du métal.

**Modèle du conducteur parfait :**

**La conductivité est infinie** et par suite toutes les grandeurs $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ et $\vec{j}$ sont nulles en tout point et à tout instant.

En effet : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ ; donc une valeur infinie de $\gamma$ exclut toute possibilité pour $\vec{E}$ d'avoir une valeur différente de zéro.

Pour que $\vec{j}$ reste finie, on ne peut avoir que $\vec{E}$ nul dans la masse du conducteur parfait.

D'après l'équation de Maxwell –Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = 0 = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = 0$ (en régime variable).

Il n'y a pas de champ électromagnétique dans le métal parfait.

L'équation de Maxwell-Gauss donne : $div\vec{E} = 0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = 0$

Au sein d'un métal parfait il n'y a pas de charges volumiques.

L'équation de Maxwell-ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu(\vec{j} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) = 0 = \mu\,\vec{j} + 0 \Rightarrow \vec{j} = 0$

Il n'y a pas de courant volumique au sein d'un métal parfait.

**Les charges et les courants ne peuvent être que surfaciques.**

**IV. 2. Les champs au voisinage du conducteur parfait (métal) :**

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ étant uniformément nuls dans le métal, les composantes normales et tangentielles sont donc toutes nulles dans le métal au voisinage de sa surface.

La continuité de la composante tangentielle du champ électrique impose alors que cette composante est également nulle au voisinage extérieur du métal : $E_t = 0$

De même, la continuité de la composante normale du champ magnétique impose que cette composante est nulle au voisinage extérieur du métal : $B_n = 0$

S'il existe au voisinage extérieur du métal une composante normale $\vec{E}_n$ du champ électrique, alors la surface du métal porte une charge surfacique libre (réelle) de densité telle que : $\vec{E}_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface du métal et dirigé vers l'extérieur du métal.

Si le champ magnétique possède une composante tangentielle $\vec{B}_t$, alors la surface du métal est le siège d'un courant surfacique réel de densité $j$ telle que :

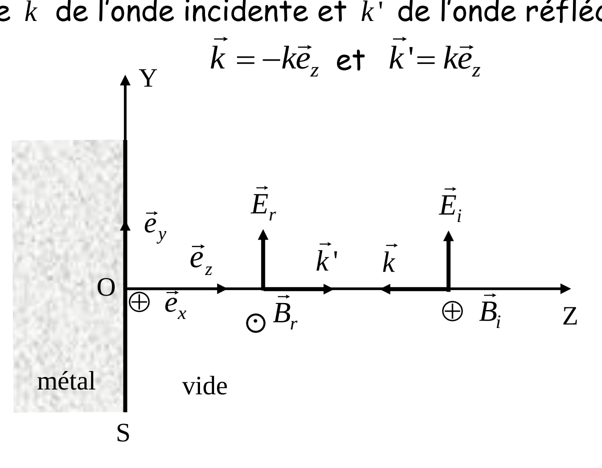
$$\vec{B}_t = \mu_o\vec{j} \wedge \vec{n}$$

### IV. 3. Réflexion d'une onde plane sur un métal (cas d'une incidence normale) :

Soit une onde plane monochromatique de pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k}$, qui se propage dans le vide et qui atteint la surface S, supposée localement plane au voisinage du point d'impact O, d'un conducteur parfait. L'onde plane considérée atteint la surface S sous une incidence normale.

Les vecteurs d'onde $\vec{k}$ de l'onde incidente et $\vec{k}'$ de l'onde réfléchie sont :

$$\vec{k} = -k\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{k}' = k\vec{e}_z$$




#### IV. 3. 1. Etude du champ électrique :

Supposons que le champ électrique de l'onde incidente est polarisé rectilignement suivant la direction de l'axe OY :

$$\vec{E}_i(z,t) = \vec{E}_o e^{j(\omega t + kz)} = E_{oy} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_y$$

Les composantes du champ électrique de l'onde réfléchie sont :

$$\vec{E}_{rx}(z,t) = E_{0rx} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}_{ry}(z,t) = E_{0ry} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$$

Puisque le champ est nul dans le métal, la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ à la traversée de la surface du métal donne :

$$\vec{E}_t = \vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = 0$$

D'où :

$$E_{rx}(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; E_{0rx} = 0$$

$$\text{et} \quad E_{iy}(0,t) + E_{ry}(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; E_{0i} + E_{0r} = 0 \;\Rightarrow\; E_{0r} = -E_{0i} \Leftrightarrow r = -1$$

La réflexion a lieu avec un changement de signe de l'amplitude du champ électrique (ou avec un changement de phase de π). La composante normale du champ électrique étant nulle, la charge surfacique σ est donc également nulle.

#### IV. 3. 2. Etude du champ magnétique :

Pour le champ magnétique de l'onde plane considérée on a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \;\Rightarrow\; \vec{B}_i(z,t) = \frac{E_{0i} e^{j(\omega t + kz)}}{c} \vec{e}_x$$

De même pour l'onde réfléchie :

$$\vec{B}_r(z,t) = -\frac{E_{0r}}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x = \frac{E_{0i}}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

La réflexion se fait donc sans changement de signe pour le champ magnétique.

La composante tangentielle du champ magnétique dans le vide, au voisinage de la surface du métal, est :

$$\vec{B}_t(0,t) = \frac{2E_{0i}}{c} e^{j(\omega t)} \vec{e}_x$$

Cette composante présente donc une discontinuité qui ne peut être qu'une conséquence de la présence d'un courant surfacique de densité $\vec{j}$ telle que :

$$\vec{B}_t(0,t) = \mu_o \vec{j} \wedge \vec{e}_z$$

D'où :

$$\frac{2E_{0i}}{c} e^{i(\omega t)} \vec{e}_x = \mu_o \vec{j} \wedge \vec{e}_z$$

On est donc amené à concevoir un courant surfacique de densité $\vec{j}$ donnée par :

$$\vec{j} = \frac{2E_{0i}}{c\mu_o} e^{j(\omega t)} \vec{e}_y$$

**IV. 3. 3. Superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie : Onde stationnaire**

L'incidence étant normale, l'onde incidente et l'onde réfléchie se superposent dans tout le demi-espace z > 0.

Le champ électrique total est :

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_i(z,t) + \vec{E}_r(z,t) = E_{0i} e^{j\omega t}\left(e^{jkz} - e^{-jkz}\right)\vec{e}_y = 2jE_{0i} e^{j\omega t}(\sin kz)\vec{e}_y$$

$$= 2E_{0i} e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}(\sin kz)\vec{e}_y$$

Soit en notation réelle :

$$\vec{E}(z,t) = 2E_{0i} \sin kz \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})\vec{e}_y$$

Pour ce champ $\vec{E}$, il n'y a plus de phénomène de propagation et l'onde est dite stationnaire d'amplitude $2E_{0i} \sin kz$.

De même pour le champ magnétique total :

$$\vec{B}(z,t) = \vec{B}_i(z,t) + \vec{B}_r(z,t) = \frac{E_{0i}}{c} e^{j\omega t}\left(e^{jkz} + e^{-jkz}\right)\vec{e}_x = \frac{2E_{0i}}{c} e^{j\omega t}(\cos kz)\vec{e}_x$$

Soit en notation réelle :

$$\vec{B}(z,t) = \frac{2E_{0i}}{c} \cos kz \cos(\omega t)\vec{e}_x$$

Comme pour le champ électrique, il n'y a pas de propagation du champ magnétique, mais seulement une onde stationnaire d'amplitude $\frac{2E_{0i}}{c}\cos kz$.

Comme pour toutes les ondes stationnaires, les points M de l'axe OZ pour lesquelles $\vec{E}$ (ou $\vec{B}$) est nul à tout instant sont appelés des nœuds alors que les points pour lesquelles l'amplitude de $\vec{E}$ (ou $\vec{B}$) est maximale (en valeur absolue) à tout instant sont appelés des ventres.

Les nœuds du champ électrique sont tels que :

$$\sin kz = \sin\frac{\omega z}{c} = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega z}{c} = n\pi \Leftrightarrow z = n\pi\frac{c}{\omega} = n\frac{\lambda}{2}$$

Les nœuds du champ magnétique sont tels que :

$$\cos kz = 0 \Leftrightarrow z = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

Deux nœuds voisins du champ électrique (ou du champ magnétique) sont distants de $\frac{\lambda}{2}$ alors que deux nœud voisins du champ électrique et du champ magnétique sont distants de $\frac{\lambda}{4}$.

Sur la surface métallique on a un nœud de champ électrique.

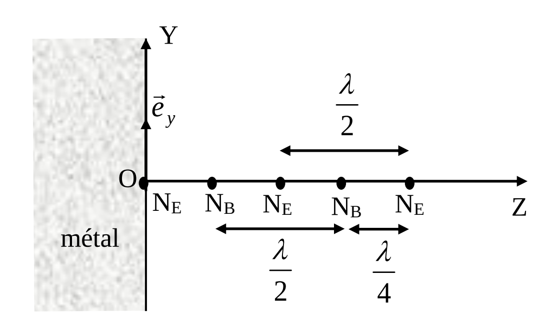
Les ventres du champ électrique sont tels que :

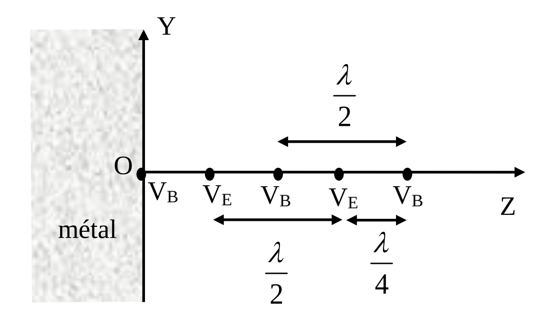
$$|\sin kz| = \left|\sin \frac{\omega z}{c}\right| = 1 \Leftrightarrow z = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

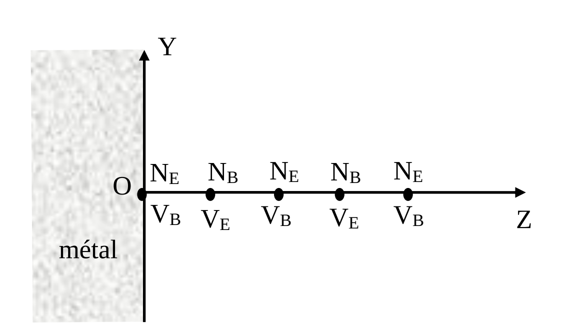
Les ventres du champ magnétique sont tels que :

$$|\cos kz| = \left|\cos \frac{\omega z}{c}\right| = 1 \Leftrightarrow z = n\frac{\lambda}{2}$$

on constate que les nœuds et les ventres pour l'un des champs $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ sont alternés et distants de $\frac{\lambda}{4}$ et que les nœuds du champ électrique correspondent aux ventres du champ magnétique et inversement. Sur la surface métallique on a un ventre de champ magnétique.



La distance entre un nœud et un ventre successif est égale à $\frac{\lambda}{4}$.

